Pero siempre quedarán preguntas abiertas. De hecho, Schaeffer y su equipo, en representación de los humanos pudieron con las damas. Ahora el ser humano va por el ajedrez, tarea ciclópea si las hay.[11]

Pero el mundo moderno requiere de las nuevas tecnologías. El avance es exponencial. Por supuesto, uno podría volver hacia atrás en el tiempo y reacomodarse como si nada hubiera pasado. Pero, dependiendo del gusto de cada uno, ¿podríamos reinstalarnos en la Edad de Piedra y empezar todo de nuevo? Lo dudo. ¿O usted no es una persona que cuando se olvida el teléfono celular en su casa, vuelve para buscarlo porque se siente desnudo hasta que no lo recupera?

11. Las damas ofrecen un número de posiciones equivalente a la raíz cuadrada de las que tiene el ajedrez, que se estima en el rango entre 10^{40} y 10^{50} (un 1 seguido de 40 a 50 ceros). Como escribió Schaeffer en su artículo en *Science*, teniendo en cuenta las dificultades que tuvieron que atravesar para resolver el problema de las damas, el ajedrez no será resuelto por un largo tiempo, salvo que se produzca un quiebre en el conocimiento que se tiene hasta ahora.

Tragamonedas

Las máquinas tragamonedas, de las que hay repartidas en todo el mundo y son bien conocidas por nosotros, produjeron en el año 2009, sólo en Estados Unidos, 25 mil millones de dólares. Y esos 25 mil millones están estimados como ganancia. Es decir, esta suma es posterior a haber pagado a quienes ganaron al jugar y descontados los impuestos (obviamente altísimos) que aporta el juego. Sin embargo, aun en esas condiciones, el número es escalofriante. Y representa la mitad de lo que producen anualmente todos los casinos de Las Vegas.

Para tener una idea de lo que significa este número, piense en lo que generó la industria del cine (nada menos) en el mismo periodo: juntando todas las salas estadounidenses y todas las películas que se exhibieron, el total recaudado fue de 10 mil millones de dólares. Es decir, las máquinas tragamonedas produjeron dos veces y media más que Hollywood, con todo el poderío y potencia de sus estudios y luminarias.

Aun así, por más interesante que resulte esta comparación, hay algo que para mí tiene aún más atractivo: ¿quiénes fabrican estas máquinas?, ¿cómo las hacen?, ¿cómo interviene la matemática en todo esto?

Por supuesto, los casinos tienen mucho cuidado en no perder de vista que la probabilidad de ganar esté siempre a favor de ellos. Por lo tanto, sea quien fuere quien las diseñe y construya, debe poder garantizar el resultado: "El casino tiene que ganar SIEMPRE".[12]

Pero las máquinas fueron cambiando. Antes había ruedas y tambores que giraban, dientes que se engarzaban, ejes que había que lubricar. Hoy es todo digital. Y eso trajo una diferencia sustancial en la percepción: en la medida que había algo mecánico involucrado, uno tenía la sensación de que el azar todavía tenía alguna incidencia.

Es decir, al hacer girar una ruleta, uno ve cómo gira la bolita en sentido contrario, y la ve saltando de un número a otro hasta depositarse en alguno de ellos. Es como si hubieran entregado una cierta tranquilidad de conciencia: si uno pierde, perdió por mala suerte. Y si gana, también ganó por la suerte. Pero no hay nada escondido, salvo que el tambor de la ruleta esté "tocado". Es decir, ganar o perder tiene que ver —en apariencia— con el azar.

Ahora, imagine una ruleta digital, en donde se van encendiendo distintas luces a medida que la bolilla imaginaria va girando alrededor de una ruleta virtual. ¿Cómo sabe uno que no hay un programa diseñado *ad hoc* de manera tal de que pueda detectar cuáles son los números que tienen menos dinero apostado y hacer detener esa bolilla en uno de esos casilleros? Tal como usted supone, ese programa es posible de diseñar e intuyo que para los programadores no debe de ser muy difícil (sí lo es para mí).

12. Una breve digresión. Cuando digo que el casino tiene que ganar siempre, quiero decir que es muy difícil encontrar un equilibrio entre el deseo del jugador por jugar, la cantidad de veces que apuesta y la cantidad de veces que pierde. La gente que opera los casinos conoce nuestras debilidades (las de los humanos) y por eso la banca termina siempre con una ventaja a su favor.

Cuando la ruleta y la bolita son tangibles, uno cree que controla. En el mundo digital, esa sensación de control se pierde. Y, aunque uno está dispuesto a someterse a la suerte, ya no se siente tan cómodo si imagina a alguien que puede mover los hilos sin que uno lo advierta.

El 70% de las máquinas tragamonedas que se usan en Estados Unidos y el 60% de las que se usan en el resto del mundo se producen en un solo lugar: International Game Technology (IGT). Es una fábrica que está situada en Reno, Nevada, el estado que también cobija a la ciudad más famosa del mundo en este rubro, Las Vegas.

El diseñador de estas máquinas y miembro del directorio de IGT es el matemático Anthony Baerlocher. Egresado de la Universidad de Notre Dame, Baerlocher tiene un objetivo claro: "El programa tiene que ser tan bueno que permita que los casinos ganen dinero SIEMPRE, pero de tal forma que los clientes ganen las suficientes veces también de manera tal de que sigan jugando o vuelvan al día siguiente". No es una tarea fácil.

Los casinos funcionan "creyendo en la ley de los grandes números".[13] Baerlocher[14] explica: "En lugar de tener una máquina, los casinos quieren miles, porque saben que cuanto más grande sea el volumen jugado, aunque alguna de las máquinas

13. En la Teoría de Probabilidades, el teorema que se conoce como "La ley de los grandes números" es el que establece que si uno repite un evento un número grande de veces (por ejemplo, tirar una moneda millones de veces) los resultados a obtenerse son los esperables (mitad cara y mitad cruz en el caso de las monedas). Es uno de los resultados más importantes de la teoría.

14. Parte de los datos de este capítulo así como las declaraciones de Baerlocher están extractados del último libro de Alex Bellos *Here's Looking at Euclid*, de reciente publicación. Para todos aquellos interesados en temas de matemática recreativa es una referencia ineludible.

pierda mucho, el total (de máquinas) tiene una probabilidad muy grande de ganar. IGT produce aparatos diseñados de forma tal que la ganancia está garantizada con un error del 0.5% después de ¡10 (diez) millones de jugadas! Por ejemplo, en el casino de Peppermill (también ubicado en Reno), cada máquina produce 2 000 jugadas por día. Como ellos tienen cerca de 2 000 tragamonedas, eso significa que llegan a 4 millones de jugadas por día, y, por lo tanto, en dos días y medio llegan a las 10 millones que necesitan para tener la garantía de que tendrán su ganancia con un error del 0.5%. Si la apuesta promedio es de un dólar y el porcentaje de ganancia está estipulado en un 5%, diez millones de jugadas significan 500 000 dólares para el casino, con un error potencial de 50 000 dólares cada 60 horas. Estos números explican el negocio y por qué los casinos tienden a tener cada vez más de estas máquinas".

El desafío para Baerlocher es "tocar" las probabilidades de manera tal de favorecer a los casinos, pero sin descorazonar a los jugadores. Hasta acá, juzgando por el desarrollo que ha tenido IGT, parece que lo ha logrado.

Moraleja: Supongo que no escribí nada nuevo, nada que no se supiera de antemano, pero internamente creo que todos tenemos la fantasía de que podremos —algún día— hacer saltar la banca o diseñar una estrategia que permita ganarle al casino. Lamento informar acá que eso es muy muy poco probable que suceda. Casi me atrevería a decir que la probabilidad es ¡cero![15]

15. Sin embargo, la gente sigue jugando. Como me dice Carlos D'Andrea, esto tiene que ver con nuestra condición de humanos: tenemos que creer en alguna parte que poseemos un toque especial que nos permite derrotar al azar.

Apuestas en el casino

El joven entra en el casino. Lleva $ 1 000 para jugar. Un amigo le dice que tiene una propuesta para hacerle. En lugar de apostar a la ruleta, a punto y blanca o al black jack, le ofrece el siguiente acuerdo: tirar una moneda 100 veces. Cada vez que lo hace tiene que arriesgar la mitad del dinero que tiene. Si acierta, gana la cantidad que apostó. Si pierde, lo mismo. O sea, pierde el dinero que apostó (que era la mitad del dinero que tenía).

Por ejemplo, al empezar a jugar tiene que apostar $500 porque es la mitad del dinero que tiene. Si gana, tiene ahora $1 500. En cambio, si pierde, se queda con $500.

Si gana primero y pierde después, pasa a tener $750. ¿Por qué? Es que si acierta en la primera tirada, como apostó $500 (de los $1 000 que traía) pasa a tener $1 500. Pero como pierde en la segunda tirada, y tuvo que haber apostado $750 (que es la mitad de los $1 500 que tenía), pasa a tener

$$1\,500 - 750 = 750$$

¿Y si pierde en la primera tirada y gana en la segunda? ¿Hay alguna diferencia? Veamos. Si pierde en la primera, como apostó $500 y tenía $1 000, se queda con $500. Sabemos que gana con la siguiente apuesta, pero como arriesga sólo la mitad de lo que tiene, eso significa que ganó \$250.

En total, tiene ahora, como en el caso anterior, \$750.

Uno tiene derecho a sospechar, entonces (aunque deberá comprobarlo), que es indiferente que gane primero y pierda después, o que pierda primero y gane después. ¿Será así? ¿No le dan ganas de pensarlo a usted?

Sigo yo. Quiero proponerle lo siguiente, que sitúa el problema en otro lugar. Cada vez que gana, agrega al dinero que tenía, una mitad más.

Esto es equivalente a decir que si tenía (digamos) X pesos, ahora pasa a tener

$$X + (1/2)\,X$$

O sea,

$$X + (1/2)\,X = (3/2)\,X$$

Es posible pensar, entonces, que cada vez que gana, multiplica la cantidad que tenía por el número (3/2).

De la misma forma, cada vez que pierde pasa a tener

$$X - (1/2)\,X = (1/2)\,X$$

O sea, si pierde, es como si multiplicara el dinero que tenía por (1/2).

Por lo tanto, ganar primero y perder después significa multiplicar primero por (3/2) y luego por (1/2). Si su suerte es exactamente al revés, y pierde primero y gana después, es como multiplicar primero por (1/2) y luego, al resultado, multiplicarlo por (3/2). Obviamente, obtiene lo mismo.

¿Qué se deduce de todo esto? Que si tirara la moneda muchas veces, para saber cuánto dinero va a tener al final, todo lo que tiene que hacer es multiplicar el dinero que trajo por (3/2) tantas veces como acertó, y multiplicar por (1/2) tantas veces como perdió.

Por ejemplo, si tiraron la moneda 5 veces y ganó 4 y perdió 1, entonces, lo que tiene que hacer es:

$$(3/2) \times (3/2) \times (3/2) \times (3/2) \times (1/2) = 81/32$$

y este número (81/32) es aproximadamente igual a 2.53.

Por lo tanto, si tiene la suerte de ganar cuatro veces de las cinco que tiraron la moneda, se iría ganador con más de dos veces y media el capital que traía (más de \$2 530 para quien arrancó con \$1 000).

Ahora, tengo algunas preguntas para hacer. Acá van:

1) Si el amigo le dice que van a tirar la moneda 10 veces y que el que trajo el dinero va a ganar 7 de las 10 veces, ¿le conviene aceptar?
2) ¿Y si de las 10 va a ganar 6, acepta o no acepta?
3) Más aún, si tiran la moneda 100 veces y el que lleva el dinero va a ganar 55 y pierde 45, ¿acepta o no acepta?
4) En todo caso, ¿cuántas de las 100 veces puede tolerar perder sin comprometer su patrimonio? Es decir, ¿cuántas veces se puede dar el lujo de perder (de las 100) sin salir perdiendo dinero cuando terminen de arrojar la moneda?

(Las respuestas, en la página 94)

Solución a "Apuestas en el casino"

Cada vez que el señor acierta con el resultado (cara o cruz), multiplica su capital por (3/2). Cada vez que pierde, divide su capital por la mitad, o sea, es como si lo multiplicara por (1/2).

Se trata, entonces, de contar cuántas veces acertó y cuántas erró.

Si de las 10 veces, acierta 6 y erra 4, lo que uno tiene que calcular es:

$$(3/2) \times (3/2) \times (3/2) \times (3/2) \times (3/2) \times (3/2) = (3/2)^6 = 11.39$$
(aproximadamente)

y por otro lado,

$$(1/2) \times (1/2) \times (1/2) \times (1/2) = (1/2)^4 = 0.0625$$
(aproximadamente también)

Luego de multiplicar estos dos números entre sí (que sería el equivalente de haber arrojado la moneda 10 veces, con 6 resultados a favor y 4 en contra), se trata de averiguar si el número es mayor que 1 o no.

Si es mayor que 1, eso significa que el señor saldrá ganando después de haber apostado las 10 veces. En cambio, si el número por el que va a terminar multiplicando su capital es menor que 1, entonces, el señor saldrá con menos dinero del que ingresó.

En este caso, lo que hay que hacer entonces es multiplicar

$$(3/2)^6 \times (1/2)^4 = (11.39) \times (0.0625) = 0.71191$$

En consecuencia, si gana 6 y pierde 4, terminará perdiendo dinero, ya que habrá multiplicado su capital por 0.71191.

En cambio, si gana 7 y pierde 3, hay que calcular:[26]

$$(3/2)^7 \times (3/2)^3 = 2,135$$

Luego, en ese caso, el señor se iría del casino con más del doble del dinero que con el que ingresó.

Falta aún contestar un par de preguntas más.

Si arrojaran la moneda 100 veces y el que lleva el dinero gana 55 veces y pierde las restantes 45, entonces el resultado es sorprendente. Al menos, lo fue para mí (¿lo intentó hacer usted por su cuenta? Hágalo, vale la pena).

La cuenta que uno debe hacer es:

$$(3/2)^{55} \times (1/2)^{45} = 0.000137616$$

Es decir, que si jugaran 100 veces, y el señor que apuesta hubiera ganado 55 de las 100 tiradas, al finalizar el proceso tendría casi una diezmilésima parte de lo que traía; o sea, un poco más de 10 centavos (más precisamente 13.76 centavos).

Eso contesta la pregunta 3. Si ahora uno quiere saber cuántas veces podría permitirse el lujo de perder (de las 100 tiradas) para no perder dinero, se trata de encontrar la primera combinación de números *m* y *n*, de manera tal que

$$(3/2)^m \times (1/2)^n \text{ sea un número mayor que } 1, \text{ y}$$
$$(m + n) = 100$$

26. Todos los resultados que figuran son aproximaciones de dos o tres decimales.

Para eso, hace falta tener una calculadora a mano. Yo pongo acá el resultado, pero vale la pena que usted confronte lo que va a leer con la realidad.

En todo caso, si uno calcula:[27]

$$(3/2)^{64} \times (1/2)^{36} = 2.708698927$$

27. El primer quiebre se produce cuando la cantidad de aciertos es 63 y de desaciertos es 37. Sin embargo, sin recurrir a una computadora y tener que revisar todos los números, la manera de resolverlo es plantear que uno quiere encontrar el número n, tal que

$$(3/2)^n \times (1/2)^{(100-n)} > 1$$

Y para calcular este número n, uno calcula el logaritmo de los números involucrados, y lo que tiene que descubrir es cuál es el n que resuelve esta ecuación:

$$\ln((3/2)^n \times (1/2)^{(100-n)}) = n \times \ln(3/2) + (100-n) \times \ln(1/2) \quad (*)$$

Lo que uno quiere es ver cuándo este número es mayor que el $\ln(1) = 0$. O sea, se trata de calcular cuál es el primer número natural n que hace que el número (*) sea positivo.

En ese caso, $n \times \ln(3/2) + (100-n) \times \ln(1/2) = n \times (\ln(3) - \ln(2)) + (100-n)(\ln(1) - \ln(2))$, y usando que $\ln(3) = 1{,}0986$, $\ln(2) = 0{,}6931$ y $\ln(1) = 0$, se tiene:

$$n \times (1.0986) - 100\,(0.6931) > 0 \text{ si y sólo si}$$

$$n > 100 \times (0.6931)/(1.0986) = 63.09$$

En consecuencia, hace falta que el apostador acierte por lo menos 64 veces para poder irse del juego ganando dinero.

y

$$(3/2)^{63} \times (1/2)^{37} = 0.902899$$

uno descubre que el señor que apuesta puede perder hasta 36 veces (y ganar las otras 64, claro está) y en ese caso, casi triplicará su capital. Pero si en lugar de perder 36 veces, pierde 37, entonces ya se irá del juego con apenas un poco más del 90% del dinero con el que entró.

◆◆◆

Solución a "Embustero"

Ahora sigo yo. En realidad, le sugiero que hagamos juntos un modelo[28] que sirva para representar lo que pasa con las cartas y el sombrero.

Tomemos un cubo cualquiera (como si fuera un dado pero sin los números). O sea, un cubo pero con las caras limpias. Voy a hacer lo siguiente: voy a pintar cada cara del cubo tratando de simular lo que recién teníamos con las cartas. Sígame.

Como una de las cartas tenía las dos caras de blanco, digamos B_1 y B_2, entonces pinto dos caras opuestas del cubo de color Blanco.

Como la segunda carta tiene Blanco de un lado (B_3) y Negro (N_3) del otro, entonces pintamos otras dos caras opuestas del cubo una de blanco y la otra de negro.

28. En la edición de *Página/12* del 27 de noviembre de 2008 escribí una versión diferente del mismo problema y usé la misma modelización. En cualquier caso, esto sirve para comprobar —una vez más— cómo funciona el pensamiento matemático. Aunque los problemas tengan enunciados diferentes, en esencia son el mismo. Y, por lo tanto, es esperable que su solución sea la misma también.